Data-driven Robust Design of a Closed-loop Supply Chain Network for Time-dependent Uncertain Carbon Tax Rate

김윤건[1], 정병도[1*]

[1]연세대학교 산업공학과

2021.05.28.

이 논문은 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(NRF-2020R1A2C1005489).

Carbon emission regulation issues

환경문제에 대한 인식으로 기업은 제품의 순·역물류를 함께 고려하는 closed-loop supply chain (CLSC) 문제에 관심을 가지고 있으며, CLSC network design 연구도 활발하게 연구되고 있음

- **Supply chain network design (SCND) problem**
  - 고객에게 최상의 방식으로 서비스를 제공하기 위해 네트워크 구조를 정의하는 문제
- **Closed-loop supply chain (CLSC) network problem**
  - SCND 문제에서 순·역물류(forward and reverse logistics)를 동시에 고려하는 문제

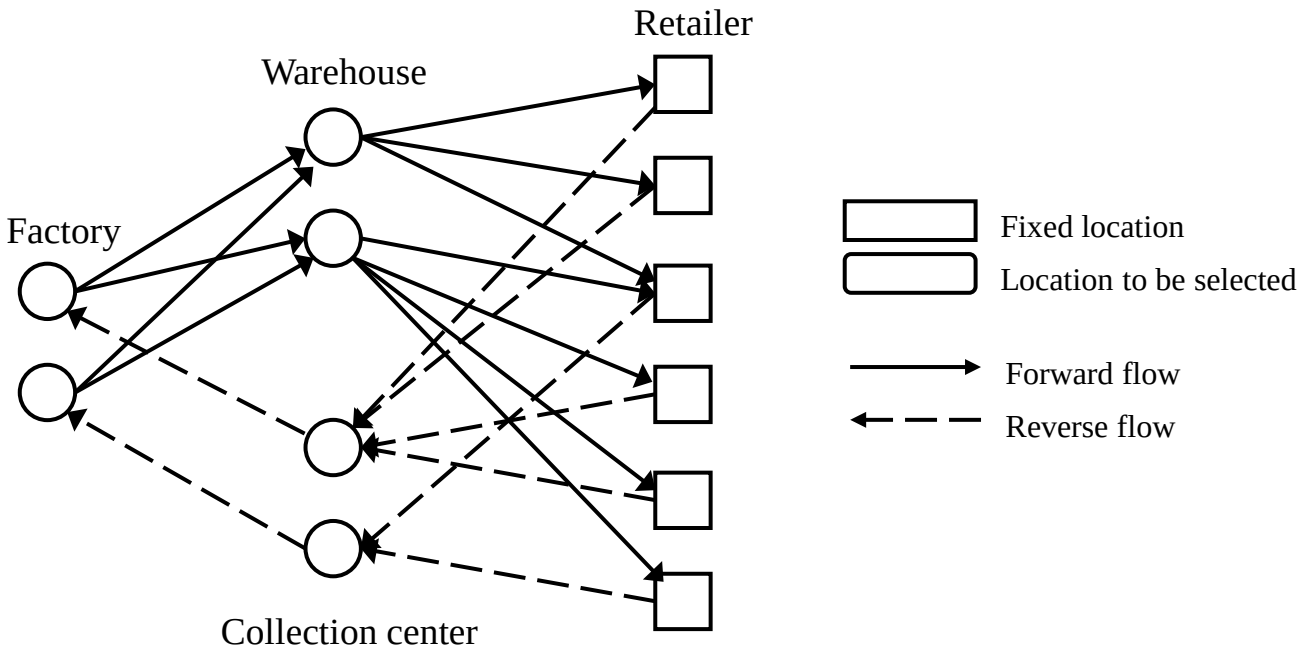


Figure 1. Closed-loop supply chain network structure

Carbon emission regulation issues

글로벌 기후변화에 대한 우려로 각국 정부는 탄소배출량 규제를 실시

- **기업에게 탄소 배출 규제는 불가피한 이슈**
  - 각국 정부는 각 기업에게 탄소 배출량에 세금을 부과하여 탄소배출량을 규제
  - 기업은 제품 운송에 따른 연료 비용과 탄소 배출량을 고려한 CLSC network design 문제에 관심

Figure 2. Global warming issue, carbon emission and tax rate

Carbon emission regulation issues

운송비용과 탄소배출세를 고려할 때 기업이 어떤 종류의 운송트럭을 선택할지는 중요한 이슈

- 운송트럭에서 발생하는 탄소배출량 산식은 **이동거리 x 운송무게 x 운송트럭 배출량** 요인으로 정의됨 (그림3)
- **운송트럭 종류에 따라 탄소배출량이 달라질 수 있음**
  - 탄소배출량이 낮은 트럭은 운송비용이 높음
  - 운송비용이 저렴한 트럭은 탄소배출량이 높음 (표2)

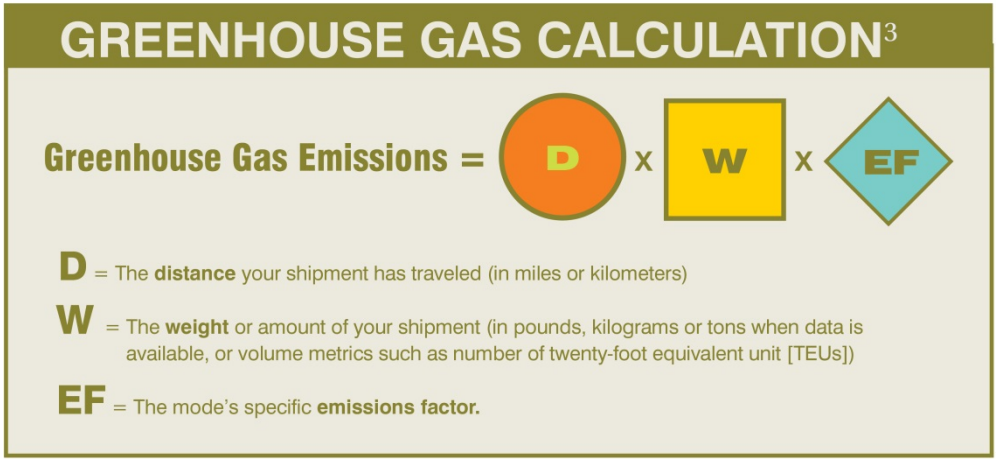


Figure 3. Greenhouse has calculation

Table 1. Characteristics of road transport options.

Transport mode	CO2 emissions factor (g/ton-km)	Cost ($/ton-km)
Mode1 (Heavy-duty truck)	0.062	$0.47
Mode2 (Mid-size truck)	0.122	$0.32
Mode3 (Light truck)	0.459	$0.19

CLSC network problem with carbon regulation

기업은 제품 수송에 따른 연료 비용과 탄소 배출량을 고려한 CLSC network design 문제에 관심

- 시설설치 비용, 운송비용, 탄소세를 최소화 시키는 Multi-period CLSC network 디자인 문제 (Gao and Ryan, 2014)

- **Multi-period CLSC network design problem**

$$\textit{Minimize} \quad \sum_{i\in F} f_i y_i + \sum_{t\in T}\sum_{m\in M}\sum_{ij\in A} c_{ijmt}x_{ijmt} + \sum_{t\in T}\hat{\alpha}_t\Gamma_t$$

$$\textit{Subject to} \quad \Gamma_t = w\sum_{ij\in A}\beta_{ij}\sum_{m\in M}\tau_m x_{ijmt},\ \forall t\in T$$

$$\sum_{w\in W}\sum_{m\in M} x_{wkmt} = d_{kt},\ \forall k\in K, t\in T$$

$$\sum_{l\in L}\sum_{m\in M} x_{klmt} = r_{kt},\ \forall k\in K, t\in T$$

$$\sum_{i\in N}\sum_{m\in M} x_{ijmt} - \sum_{i\in N}\sum_{m\in M} x_{jimt} = 0,\ \forall j\in W\cup L, t\in T$$

$$\sum_{j\in N}\sum_{m\in M} x_{ijmt} - \Lambda_{it}y_i \le 0,\ \forall i\in F, t\in T$$

$$\sum_{l\in L}\sum_{m\in M} x_{lpmt} - \Lambda_{pt}y_p \le 0,\ \forall p\in P, t\in T$$

$$y\in\{0,1\}^{|F|}, x\in\mathbb{R}_+^{|A|\times|M|\times|T|} \qquad (1)$$

Table 2. Notations.

Symbol	Description
Sets	
P	Set of potential factories
W	Set of potential warehouses
L	Set of potential collection centers
K	Set of retailer
M	Set of transportation modes
T	Set of time periods
A	Set of all the arcs in the network
Decision variables	
x_{ijmt}	The amount of product transported from node i to j at time t
y_i	1 if facility i is opened, 0 otherwise, $i \in P \cup W \cup L$
Parameters	
f_i	The investment cost for building facility, $i \in P \cup W \cup L$
c_{ijmt}	Unit transportation cost from node i to node j using transportation mode m in period t
d_{kt}	Demand for retailer k at time t
r_{kt}	Return for retailer k at time t
Λ_{it}	Maximum capacity of facility i in period t, $i \in P \cup W \cup L$
β_{ij}	Distance (km) from node i to node j
τ_m	Carbon emission factor (g/ton-km) for transportation mode m
w	Unit weight of product (ton)
α_t	Carbon tax rate at time t

CLSC network problem with carbon regulation

기업은 CLSC network design 의사결정을 내릴 때 탄소세의 불확실성을 고려해야하는 문제에 직면

- 기업이 CLSC network design 의사결정을 내릴 때 정부가 공시하는 미래의 탄소세는 알지 못하는 상태
- 기업은 불확실한 탄소세에 대응가능한 CLSC network design 방법에 관심

- **Multi-period CLSC network design problem**

Uncertainty parameter

$$\textit{Minimize} \quad \sum_{i\in F} f_i y_i + \sum_{t\in T}\sum_{m\in M}\sum_{ij\in A} c_{ijmt} x_{ijmt} + \sum_{t\in T} \hat{\alpha}_t \Gamma_t$$

목적함수: 시설설치 비용 + 제품운송 비용 + **탄소세**

$$\textit{Subject to} \quad \Gamma_t = w \sum_{ij\in A} \beta_{ij} \sum_{m\in M} \tau_m x_{ijmt}, \ \forall t \in T$$

제약식1: 탄소배출량 산식

$$\sum_{w\in W}\sum_{m\in M} x_{wkmt} = d_{kt}, \ \forall k \in K, t \in T$$

$$\sum_{l\in L}\sum_{m\in M} x_{klmt} = r_{kt}, \ \forall k \in K, t \in T$$

제약식2와 3: 시장 수요 & 재활용 수량 충족 제약

$$\sum_{i\in N}\sum_{m\in M} x_{ijmt} - \sum_{i\in N}\sum_{m\in M} x_{jimt} = 0, \ \forall j \in W \cup L, t \in T$$

제약식4: 제품 흐름 균형 제약

$$\sum_{j\in N}\sum_{m\in M} x_{ijmt} - \Lambda_{it} y_i \le 0, \ \forall i \in F, t \in T$$

$$\sum_{l\in L}\sum_{m\in M} x_{lpmt} - \Lambda_{pt} y_p \le 0, \ \forall p \in P, t \in T$$

제약식5와 6: 공급망 시설 별 가용능력 제약

$$y \in \{0,1\}^{|F|}, x \in \mathbb{R}_+^{|A|\times|M|\times|T|} \qquad (1)$$

제약식7과 8: 이분형 의사결정변수 제약(y), 비음 제약(x)

* Gao, N., and Ryan, S. M. (2014). Robust design of a closed-loop supply chain network for uncertain carbon regulations and random product flows. *EURO Journal on Transportation and Logistics*, *3*(1), 5-34.

Optimization under uncertainty

파라미터의 불확실성에 대응가능한 방법으로 강건최적화 (robust optimization, RO)는 매력적인 최적화 방법

- 강건최적화 (robust optimization, RO)는 불확실한 파라미터에 대해 worst-case approach로 불확실성에 대응

- **Robust optimization (RO)**

$$\begin{aligned} \textit{Minimize} \quad & \sum_j c_j x_j \\ \textit{Subject to} \quad & \sum_j \tilde{a}_{ij} x_j \le b_i \quad \forall i \\ & l_j \le x_j \le u_j \quad \forall j \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\tilde{a}_{ij} \in \left[a_{ij} - \zeta_{ij}\hat{a}_{ij},\ a_{ij} + \zeta_{ij}\hat{a}_{ij} \right],\ \left|\zeta_{ij}\right| \le 1$$
$$\rightarrow \tilde{a}_{ij} = a_{ij} + \zeta_{ij}\hat{a}_{ij},\ \forall j \in J_i$$

- **Tractable Robust counterpart (RC)**

$$\sum_j \tilde{a}_{ij} x_j \le b_i$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sum_j a_{ij} x_j}_{\text{Nominal term}} + \underbrace{\sum_{j \in J_i} \zeta_{ij}\hat{a}_{ij} x_j}_{\text{Perturbation term}} \le b_i \tag{2.2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_j a_{ij} x_j + \max_{\zeta \in \mathcal{U}_i} \left\{ \sum_{j \in J_i} \zeta_{ij}\hat{a}_{ij} x_j \right\} \le b_i \tag{2.3}$$

Worst-case in uncertainty set

- **Uncertainty set**

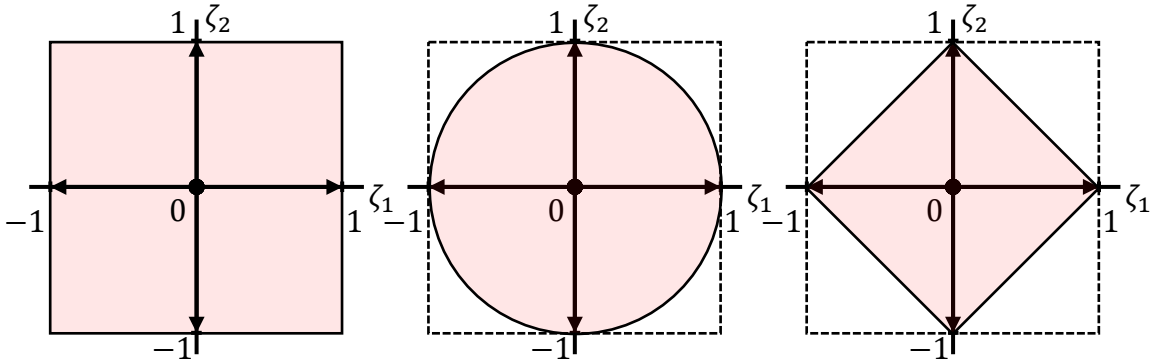


Figure 4. The uncertainty sets U for a constraint with two uncertain parameters

- **Box uncertainty set**

$$\mathcal{U}_\infty = \left\{ \zeta : \|\zeta\|_\infty \le \Psi \right\}$$

- **Ellipsoidal uncertainty set**

$$\mathcal{U}_2 = \left\{ \zeta : \|\zeta\|_2 \le \Omega,\ \|\zeta\|_\infty \le \Psi \right\}$$

- **Polyhedral uncertainty set**

$$\mathcal{U}_1 = \left\{ \zeta : \|\zeta\|_1 \le \Gamma,\ \|\zeta\|_\infty \le \Psi \right\}$$

CLSC network problem with uncertain carbon regulation

Gao and Ryan (2014)는 불확실한 탄소세에 대해 대응가능한 Multi-period Robust CLSC 모형을 제시

- 모형 (2)는 불확실한 탄소세에 대해 Box uncertainty set을 적용한 Multi-period robust counterpart
- 모형 (2)는 모형 (1)보다 탄소세의 영향도가 커진 만큼 탄소배출량이 적은 운송트럭을 선택할 가능성 높아짐

- **Robust counterpart with box uncertainty set (RC)**

$$\textit{Minimize} \quad z$$

$$\textit{Subject to} \quad \sum_{i\in F} f_i y_i + \sum_{t\in T}\sum_{m\in M}\sum_{ij\in A} c_{ijmt} x_{ijmt} + \sum_{t\in T}(\hat{\alpha}_t + \delta_t)\Gamma_t \le z$$

불확실한 탄소세에 대한 worst-case

$$\Gamma_t = w\sum_{ij\in A}\beta_{ij}\sum_{m\in M}\tau_m x_{ijmt}, \ \forall t\in T$$

$$\sum_{w\in W}\sum_{m\in M} x_{wkmt} = d_{kt}, \ \forall k\in K, t\in T$$

$$\sum_{l\in L}\sum_{m\in M} x_{klmt} = r_{kt}, \ \forall k\in K, t\in T$$

$$\sum_{j\in N}\sum_{m\in M} x_{ijmt} - \sum_{i\in N}\sum_{m\in M} x_{jimt} = 0, \ \forall j\in W\cup L, t\in T$$

$$\sum_{i\in N}\sum_{m\in M} x_{ijmt} - \Lambda_{it} y_i \le 0, \ \forall i\in F, t\in T$$

$$\sum_{l\in L}\sum_{m\in M} x_{lpmt} - \Lambda_{pt} y_p \le 0, \ \forall p\in P, t\in T$$

$$y\in\{0,1\}^{|F|}, x\in\mathbb{R}_+^{|A|\times|M|\times|T|} \qquad (3)$$

Table 1. Characteristics of road transport options.

Transport mode	CO2 emissions factor (g/ton-km)	Cost ($/ton-km)
Mode1 (Heavy-duty truck)	0.062	$0.47
Mode2 (Mid-size truck)	0.122	$0.32
Mode3 (Light truck)	0.459	$0.19

* Gao, N., and Ryan, S. M. (2014). Robust design of a closed-loop supply chain network for uncertain carbon regulations and random product flows. *EURO Journal on Transportation and Logistics*, *3*(1), 5-34.

Research motivation

기존 Multi-period RO 모형은 불확실한 파라미터가 시간에 독립으로 가정하여 매우 보수적인 문제 존재

- Multi-period를 고려한 대부분 RO 연구는 ζ_s가 시간에 독립적으로 가정 (그림 5)
  - Box uncertainty set 기반의 RC는 모든 s 시점의 ζ_s가 1 혹은 -1에서 worst-case가 됨 (매우 보수적)
- **Multi-period RO problem with time-dependent uncertain parameter**
  - 현실에서는 random variable의 과거 값이 현재 값에 영향을 주는 경우 존재 (장마철 날씨, 제조 품질수준)
  - ζ_s가 연속적으로 발생하며, 과거의 실현 값이 현재의 값에 영향을 미치는 경우
    - Historical data로 부터 미래에 높은 확률로 실현될 구간을 예측할 수 있음
    - 시계열 특징이 반영된 uncertainty set을 정의한다면 덜 보수적인 최적해를 기대할 수 있을 것 (그림 6)

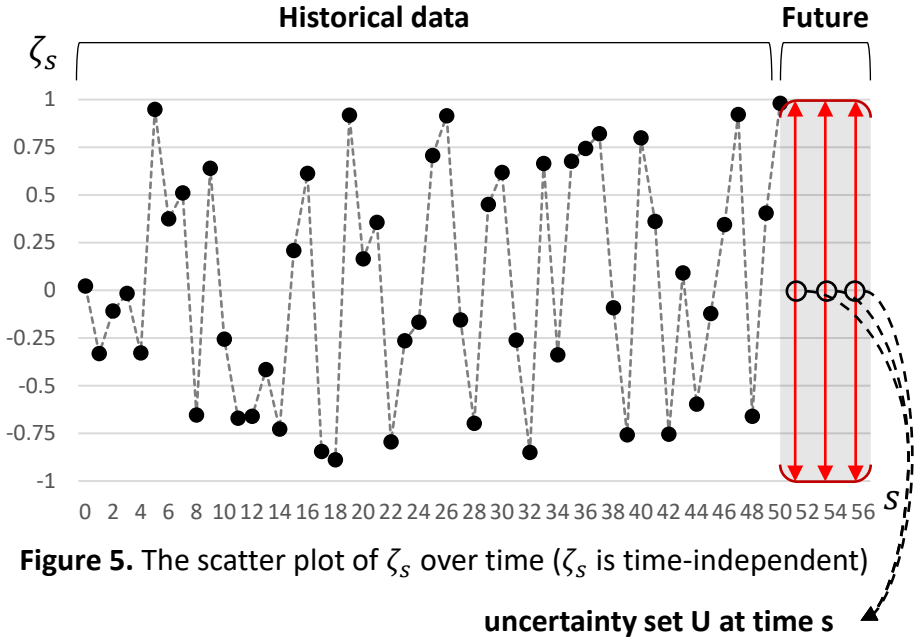


Figure 5. The scatter plot of ζ_s over time (ζ_s is time-independent)

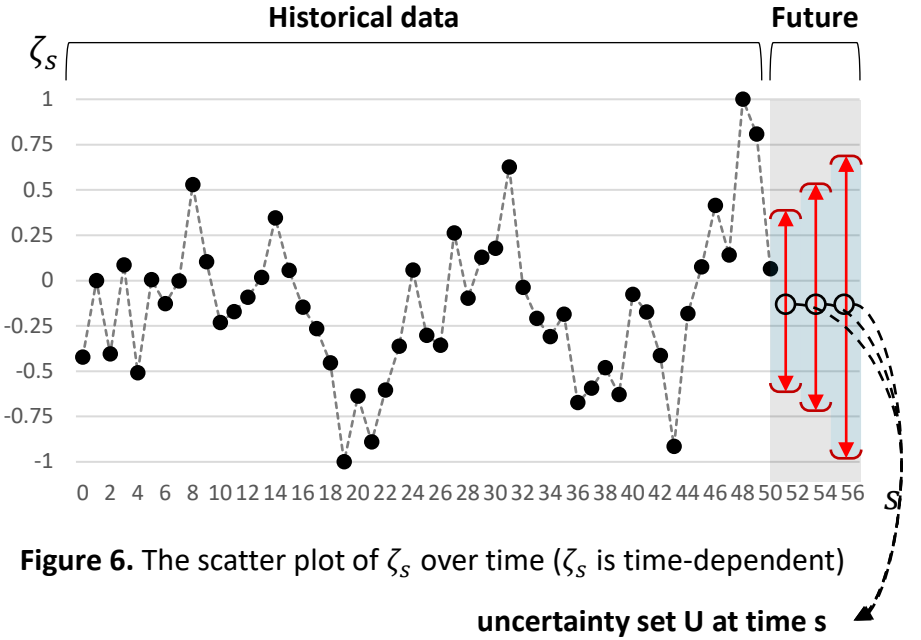


Figure 6. The scatter plot of ζ_s over time (ζ_s is time-dependent)

Time series – Autoregressive process (1/2)

시계열 모형 중 자기회귀과정 (autoregressive process, AR)은 과거 값이 현재 값에 영향을 주는 시계열 과정

- 본 연구에서는 탄소세가 시간에 종속적이며 1차 자기회귀과정 (autoregressive process, AR) 과정을 따를 때 시계열 특성을 반영한 Robust approach 방법을 제시
- 수식 (2.2)에서 ζ_{ij}가 시간에 종속적이라면, ζ_{ij}를 ζ_{ijs}로 대체해서 사용
- **Autoregressive process (AR)**
  - 만약 ζ_{ijs}가 수식 (4.1)의 관계를 만족하면, ζ_{ijs}는 평균이 μ인 p차 자기회귀과정 AR(p) 을 따름:

$$\zeta_{ijs} - \mu_{ij} = \phi_{ij1}\left(\zeta_{ij,s-1} - \mu_{ij}\right) + \phi_{ij2}\left(\zeta_{ij,s-2} - \mu_{ij}\right) + \ldots + \phi_{ijp}\left(\zeta_{ij,s-p} - \mu_{ij}\right) + \varepsilon_{ijs} \quad (4.1)$$
$$, \; where \; \varepsilon_{ijs} \sim WN \; N(0, \sigma^2_{ij\varepsilon})$$

- 만약 ζ_{ijs}가 바로 직전 값에 영향을 받으면, ζ_{ijs}는 AR(1) 과정을 따른다고 하며, 수식 (4.2)와 같이 정의 됨
- AR(1) 과정은 마코프(Markov) 과정으로 불리기도 함

$$\zeta_{ijs} - \mu_{ij} = \phi_{ij}\left(\zeta_{ij,s-1} - \mu_{ij}\right) + \varepsilon_{ijs}$$
$$, \; where \; \left|E\left(\zeta_{ijs}\right)\right| = \left|\mu_{ij}\right| < \infty, \; \left|\phi_{ij}\right| < 1, \; \varepsilon_{ijs} \sim WN \; N(0, \sigma^2_{ij\varepsilon}) \quad (4.2)$$

$$\rightarrow \zeta_{ijs} = \phi_{ij}\zeta_{ij,s-1} + \varepsilon_{ijs}, \; \left(where \; \mu_{ij} = 0\right) \quad (4.3)$$

Time series – Autoregressive process (2/2)

AR모형의 예측구간은 불확실한 파라미터가 미래에 높은 확률로 존재할 것으로 기대되는 영역

- **AR(p) 모형의 예측값과 예측구간**
  - 과거 관측값: $\zeta_{ijs}, \zeta_{ij,s-1} \cdots, \zeta_{ij,s-p+1}$ (p 개)
  - $\zeta_{ij,s+t}$: 시점 s에서부터 t-시차 후의 값 (미래 값)
  - $\zeta_{ijs}(t)$: 시점 s에서부터 t-시차 후의 예측값
  - 관측되지 않은 $\zeta_{ij,s+t}$의 예측값 $\zeta_{ijs}(t)$ 은 수식 (5.1)과 같이 정의:

$$\zeta_{ijs}(t) = E\left(\zeta_{ij,s+t} \mid \zeta_{ijs}, \zeta_{ij,s-1}, \ldots, \zeta_{ij,s-p+1}\right) \tag{5.1}$$

  - ζ_{ijs}가 AR(1)과정을 따르고, $s+t$ 시점의 ζ_{ijs}값을 예측하는 함수는 수식 (5.2)와 같이 정의:

$$\zeta_{ijs}(t) = E\left(\zeta_{ij,s+t} \mid \zeta_{ijs}\right) = \left(\phi_{ij}\right)^t \zeta_{ijs} \tag{5.2}$$

  - $\zeta_{ij,s+t}$의 $1-\alpha\%$ 예측구간은 수식 (5.3)과 같이 정의:

$$\zeta_{ijs}(t) \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_{ij}(t) \tag{5.3}$$

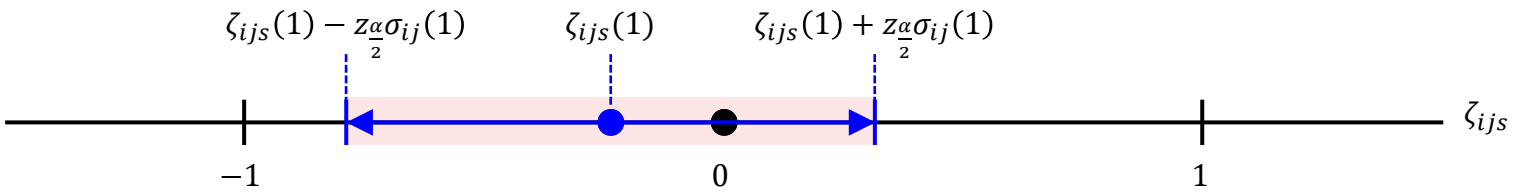


Figure 7. The predictive value and interval of $\zeta_{ij,s+1}$

Proposed model – Markov uncertainty set

본 연구에서는 AR(1) 모형의 예측구간을 이용하여 새로운 uncertainty set인 Markov uncertainty set을 제시

- **Markov uncertainty set**
  - 수식 (5.3)은 미래값 $\zeta_{ij,s+t}$의 $1-\alpha\%$의 확률을 갖고 포함될 구간을 의미
  - ζ_{ijs}가 AR(1) 과정을 따를 때 과거값에 종속적인 $\zeta_{ij,s+t}$의 Box uncertainty set으로 해석 가능
  - 본 연구에서 새롭게 제안하는 $\zeta_{ij,s+t}$의 $1-\alpha\%$ 예측구간을 활용한 uncertainty set은 수식 (6)와 같이 정의:

$$\mathcal{U}_{Mkv}(t)=\left\{\begin{array}{c}\zeta_{ijs}=\phi_{ij}\zeta_{ij,s-1}+\varepsilon_{ijs},\ \varepsilon_{ijs}\sim WN\ N\left(0,\sigma_{ij\varepsilon}^{2}\right)\\ \zeta_{ij,s+t}:\ \zeta_{ij,s+t}\in\left[\zeta_{ijs}(t)-z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{ij}(t),\ \zeta_{ijs}(t)+z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{ij}(t)\right]\end{array}\right\} \quad (6)$$

  - AR(1) 과정은 Markov 과정으로 불리기도 하므로,
    본 연구에서는 수식 (6)로 표현된 uncertainty을 Markov uncertainty set 명명

$$\zeta_{ij,s+t}\in\left[\zeta_{ijs}(t)-z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{ij}(t),\ \zeta_{ijs}(t)+z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{ij}(t)\right]$$

$$\rightarrow\zeta_{ij,s+t}=\zeta_{ijs}(t)\pm\eta_{ijt}z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{ij}(t),\ \eta_{ijt}\in[-1,\ 1]$$

Proposed model – Tractable Markov robust counterpart

$1-\alpha\%$ Markov uncertainty set을 적용한 tractable Markov robust counterpart는 수식 (7)과 같이 도출

- **Tractable Markov robust counterpart**

$$\sum_j \tilde{a}_{ij} x_j \le b_i \tag{2.1}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sum_j a_{ij} x_j + \sum_{j\in J_i} \zeta_{ij,s-1}(1)\hat{a}_{ij} x_j}_{\text{Nominal term}} + \underbrace{\sum_{j\in J_i} z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_{ij}(1)\hat{a}_{ij} y_j}_{\text{Perturbation term}} \le b_i,\ -y_j \le x_j \le y_j \tag{7}$$

- 수식 (7) 도출과정

$$\sum_j \tilde{a}_{ij} x_j \le b_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_j a_{ij} x_j + \max_{\zeta\in\mathcal{U}_{Mkv}(1)} \left\{ \sum_{j\in J_i} \zeta_{ijs} \hat{a}_{ij} x_j \right\} \le b_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_j a_{ij} x_j + \max_{\eta_{ij}\in[-1,\,1]} \left\{ \sum_{j\in J_i} \left(\zeta_{ij,s-1}(1) \pm \eta_{ij} z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_{ij}(1) \right) \hat{a}_{ij} x_j \right\} \le b_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_j a_{ij} x_j + \sum_{j\in J_i} \zeta_{ij,s-1}(1)\hat{a}_{ij} x_j + \sum_{j\in J_i} z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_{ij}(1)\hat{a}_{ij} |x_j| \le b_i$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sum_j a_{ij} x_j + \sum_{j\in J_i} \zeta_{ij,s-1}(1)\hat{a}_{ij} x_j}_{\text{Nominal term}} + \underbrace{\sum_{j\in J_i} z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_{ij}(1)\hat{a}_{ij} y_j}_{\text{Perturbation term}} \le b_i,\ -y_j \le x_j \le y_j$$

Proposed model – Data-driven Markov uncertainty set

Markov uncertainty set의 $\zeta_{ijs}(t)$와 $\sigma_{ij}(t)$을 Historical data로 추정한 data-driven Markov uncertainty set 필요

- Markov uncertainty set (6)에서 $\zeta_{ijs}(t)$와 $\sigma_{ij}(t)$는 historical data로 추정 가능
- $\hat{\zeta}_{ijs}(t)$와 $\hat{\sigma}_{ij}(t)$를 historical data로 추정한 $\zeta_{ijs}(t)$와 $\sigma_{ij}(t)$라 하면,
  data-driven Markov uncertainty set은 수식 (8)과 같이 정의됨

- **Data-driven Markov uncertainty set**

$$\hat{\mathcal{U}}_{Mkv}(t)=\left\{\begin{array}{c}\zeta_{ijs}=\phi_{ij}\zeta_{ij,s-1}+\varepsilon_{ijs},\ \varepsilon_{ijs}\sim WN\ N\left(0,\sigma_{ij\varepsilon}^{2}\right)\\ \zeta_{ij,s+t}:\ \zeta_{ij,s+t}\in\left[\hat{\zeta}_{ijs}(t)-z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{ij}(t),\ \hat{\zeta}_{ijs}(t)+z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{ij}(t)\right]\end{array}\right\} \tag{8}$$

$$\hat{\zeta}_{ij,s-1}(t)=\hat{\phi}_{ij}^{t}\zeta_{ij,s-1}$$

$$\hat{\sigma}_{ij}(t)=\hat{\sigma}_{\varepsilon}\sqrt{\frac{1-\hat{\phi}_{ij}^{2t}}{1-\hat{\phi}_{ij}^{2}}}=\hat{\gamma}_{0}\left(1-\hat{\phi}_{ij}^{2}\right)\sqrt{\frac{1-\hat{\phi}_{ij}^{2t}}{1-\hat{\phi}_{ij}^{2}}}$$

$$,\ where\ \hat{\phi}_{ij}=\frac{\sum_{s'=2}^{s-1}\left(\zeta_{ijs'}-\overline{\zeta}_{ij}\right)\left(\zeta_{ij,s'-1}-\overline{\zeta}_{ij}\right)}{\sum_{s'=1}^{s-1}\left(\zeta_{ijs'}-\overline{\zeta}_{ij}\right)^{2}},\ \hat{\gamma}_{0}=\frac{1}{t-1}\sum_{s'=1}^{s-1}\left(\zeta_{ijs'}-\overline{\zeta}_{ij}\right)^{2}$$

Proposed model – CLSC problem with Markov uncertainty set

VCM Lab.

불확실한 탄소세가 AR(1) 과정을 따를 때 Markov uncertainty set을 적용한 robust 모형은 모형 (9)와 같이 정의

- **Robust counterpart with Markov box uncertainty set (MRC, proposed model)**

$$\text{Minimize} \quad z$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{i\in F} f_i y_i + \sum_{t\in T}\sum_{m\in M}\sum_{ij\in A} c_{ijmt} x_{ijmt}$$

$$+ \sum_{t\in T}\left(\hat{\alpha}_t + \left(\zeta_0(t) + z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma(t) \right) \delta_t \right) \Gamma_t \le z$$

$$\Gamma_t = w \sum_{ij\in A} \beta_{ij} \sum_{m\in M} \tau_m x_{ijmt}, \ \forall t \in T$$

$$\sum_{w\in W}\sum_{m\in M} x_{wkmt} = d_{kt}, \ \forall k \in K, t \in T$$

$$\sum_{l\in L}\sum_{m\in M} x_{klmt} = r_{kt}, \ \forall k \in K, t \in T$$

$$\sum_{i\in N}\sum_{m\in M} x_{ijmt} - \sum_{i\in N}\sum_{m\in M} x_{jimt} = 0, \ \forall j \in W \bigcup L, t \in T$$

$$\sum_{j\in N}\sum_{m\in M} x_{ijmt} - \Lambda_{it} y_i \le 0, \ \forall i \in F, t \in T$$

$$\sum_{l\in L}\sum_{m\in M} x_{lpmt} - \Lambda_{pt} y_p \le 0, \ \forall p \in P, t \in T$$

$$y \in \{0,1\}^{|F|}, x \in \mathbb{R}_+^{|A|\times|M|\times|T|} \qquad (9)$$

Numerical Experiment – Experimental setting (1/2)

- **Experimental setting**
  - Time periods: $t = 1,2,\dots,6 \rightarrow T = 6$
  - # of potential factories: $|P| = 10$
  - # of potential warehouses: $|W| = 15$
  - # of potential collection centers: $|L| = 10$
  - # of potential retailers: $|K| = 30$
  - Carbon tax rate α_t: $\alpha_t \in [5,15]$

- The candidate facility locations are randomly generated in a [0, 5,000] x [0, 5,000] square.

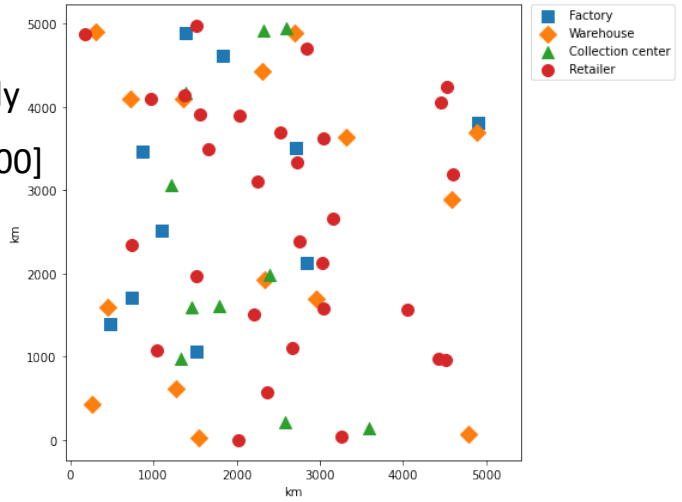


Figure 8. Customer locations and potential locations for facilities

Table 3. Experiment data

Parameters for potential facility			
Notation	Factory (p)	Warehouse (w)	Collection center (k)
f_i	\$ 5,000,000	\$ 500,000	\$ 125,000
Λ_{it}	$Uniform(100{,}000, 160{,}000)$	$Uniform(25{,}000, 75{,}000)$	$Uniform(6{,}200, 25{,}000)$
Parameters for demand and return			
d_{kt}	$d_{kt} \sim Uniform(800, 10{,}000)$		
r_{kt}	$u_{kt}d_{kt}, u_{kt} \sim Uniform(0.05, 0.12)$		
Parameters for transportation and carbon emission			
Transportation mode	Mode1 (m=1)	Mode2 (m=2)	Mode3 (m=3)
τ_m	0.062	0.122	0.459
tc_m	0.47	0.32	0.19

Numerical Experiment – Experimental setting (2/2)

실험은 두 단계로 나뉘어서 진행하며, experiment 1은 DLP와 RC 대비 MRC의 성능을 평가를 목적으로 하며, Experiment 2는 AR(1) 모형을 따르는 탄소세의 자기회귀계수 ϕ에 따른 성능 평가를 목적으로 함

- **Numerical 실험에 사용되는 모형은 크게 세 가지이며, MRC는 자기회귀계수 ϕ에 따른 6가지 모형으로 구분**
  - DLP: Deterministic linear programming (모형 1)
  - RC: Robust counterpart (모형 2)
  - MRC: Markov robust counterpart (모형 9)
    - **MRC_N9 (or 7 or 5)**: 탄소세의 AR(1) 모형의 ϕ가 음수(negative)이며, 그 값이 -0.9 (or -0.7 or -0.5)인 경우에 대한 MRC
    - **MRC_P9 (or 7 or 5)**: 탄소세의 AR(1) 모형의 ϕ가 양수(positive)이며, 그 값이 0.9 (or 0.7 or 0.5)인 경우에 대한 MRC
- Experiment 1과 Experiment 2에서 비교되는 모형은 표 4에 정리되어 있음

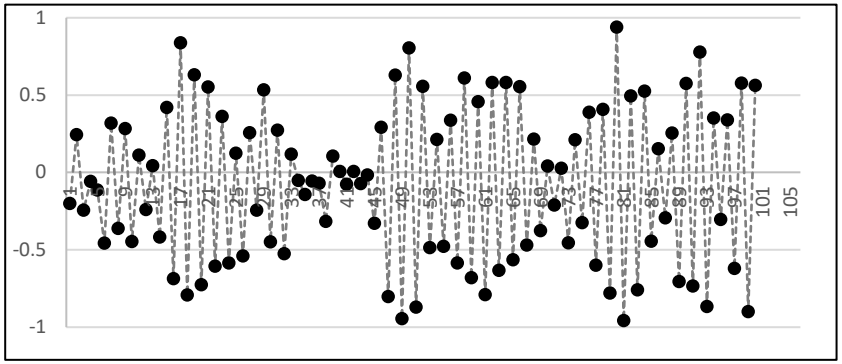
Table 4. Experimental comparison model

			Experiment1		Experiment2	
	Model	Description	Experiment 1-1	Experiment1-2	Experiment 2-1	Experiment2-2
1	DLP	Deterministic model	O	O	O	O
2	RC	Robust counterpart with Box uncertainty set	O	O	O	O
3	MRC_N9	Markov robust counterpart with ϕ = -0.9	O		O	
4	MRC_P9	Markov robust counterpart with ϕ = 0.9		O		O
5	MRC_N7	Markov robust counterpart with ϕ = -0.7			O	
6	MRC_P7	Markov robust counterpart with ϕ = 0.7				O
7	MRC_N5	Markov robust counterpart with ϕ = -0.5			O	
8	MRC_P5	Markov robust counterpart with ϕ = 0.5				O

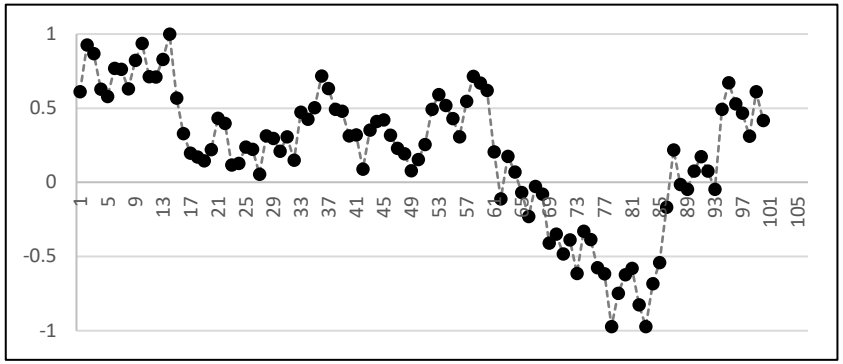
Numerical Experiment – Experiment 1

Experiment 1의 MRC에서 각 시점 별 Markov uncertainty set은 기존 box uncertainty set보다 작은 크기를 가짐

- 그림 9은 MRC_N9와 MRC_P9에 대응하는 적용할 탄소세의 historical data이며, historical data에 대한 6시점까지의 미래 예측값에 예측구간은 표 5와 6와 같음 → **표 6의 예측구간은 Markov uncertainty set이 됨**



a. $\phi = -0.9$



b. $\phi = 0.9$

Figure 9. Historical data of uncertain carbon tax rate when $\phi = -0.9$ and $\phi = 0.9$

Table 5. Estimation of $\hat{\zeta}_{s-1}(t)$

	$\hat{\zeta}_{s-1}(t)$	
t	$\phi = -0.9$	$\phi = 0.9$
1	-0.5106	0.3777
2	0.4636	0.3427
3	-0.421	0.3109
4	0.3823	0.282
5	-0.3471	0.2558
6	0.3152	0.2321

Table 6. 95% prediction interval of the $\hat{\zeta}_{s-1}(t)$ when $\phi = -0.9$ and $\phi = 0.9$.

	$\phi = -0.9$		$\phi = 0.9$	
t	95% lb	95% ub	95% lb	95% ub
1	-0.5963	-0.4248	0.3066	0.4488
2	0.3478	0.5795	0.2467	0.4387
3	-0.5567	-0.2852	0.1984	0.4233
4	0.2321	0.5324	0.1577	0.4064
5	-0.5082	-0.186	0.1225	0.3892
6	0.1456	0.4847	0.0918	0.3724

Numerical Experiment – Experiment 1 results (1/4)

MRC는 RC보다 작은 최적 목적함수 값 (total cost)을 보이며, DLP보다 적은 탄소배출량을 보임

- 표 7와 8은 DLP, RC, 그리고 MRC의 최적 목적함수 값과 이에 따른 탄소배출량이 정리되어 있음
  - MRC는 RC보다 작은 최적 목적함수 값 (total cost)을 보이며, DLP보다 적은 탄소배출량을 보이며, 이는 DLP보다는 보수적이면서 RC보다는 optimality를 덜 잃는 경향을 보여주는 것을 내포
- 표 9은 numerical experiment의 시뮬레이션 데이터를 요약하고 있으며, experiment 1에서는 DLP, RC, MRC의 최적 솔루션에 대해 시뮬레이션 데이터 **Data1, Data2-1, Data-3-1**을 적용한 시뮬레이션 결과를 비교함

Table 7. Comparison of the optimal objective function value.

Model	Total cost	Facility cost	Transportation cost	Carbon tax cost
DLP	15.3234	12.25	1.3645	1.7089
RC	16.1278	12.25	1.5608	2.3169
MRC_N9	15.4097	12.25	1.406	1.7537
MRC_P9	15.6639	12.25	1.477	1.9369

*Total cost = Facility cost + Transportation cost + Carbon tax cost

Table 8. Comparison of carbon emissions.

Model	Total carbon emissions
DLP	170885.4
RC	154460.6
MRC_N9	167671.3
MRC_P9	160551.4

Table 9. Simulation data.

	Simulation Data	Description		Simulation Data	Description
1	**Data 1**	$\boldsymbol{\alpha_t \sim Uniform(5,15)}$ → Data 1의 의미는 탄소세가 시간에 독립적으로 실현되는 경우를 의미			
2	**Data 2-1**	$\boldsymbol{\alpha_t + \zeta_t\delta_t \vert \zeta_t = \phi\zeta_{t-1} + \varepsilon_{it}}$, **where** $\boldsymbol{\phi = -0.9}$	**5**	**Data 3-1**	$\boldsymbol{\alpha_t + \zeta_t\delta_t \vert \zeta_t = \phi\zeta_{t-1} + \varepsilon_{it}}$, **where** $\boldsymbol{\phi = 0.9}$
3	Data 2-2	$\alpha_t + \zeta_t\delta_t \vert \zeta_t = \phi\zeta_{t-1} + \varepsilon_{it}$, where $\phi = -0.7$	6	Data 3-2	$\alpha_t + \zeta_t\delta_t \vert \zeta_t = \phi\zeta_{t-1} + \varepsilon_{it}$, where $\phi = 0.7$
4	Data 2-3	$\alpha_t + \zeta_t\delta_t \vert \zeta_t = \phi\zeta_{t-1} + \varepsilon_{it}$, where $\phi = -0.5$	7	Data 3-3	$\alpha_t + \zeta_t\delta_t \vert \zeta_t = \phi\zeta_{t-1} + \varepsilon_{it}$, where $\phi = 0.5$

Numerical Experiment – Experiment 1 results (2/4)

Data 1 (탄소세가 시간에 독립적으로 실현)에 대한 시뮬레이션 실험의 평균 관점에서 DLP가 가장 좋은 성능을 보임

- **Simulation data: *Data 1*** ($\alpha_t \sim Uniform(5,15)$)

Table 10. Comparison of the simulation results in Data 1.

Data		Model	Total cost	Facility cost	Transportation cost	Carbon tax cost
Data 1	mean	DLP	15.337	12.25	1.3646	1.7225
		RC	15.3678	12.25	1.5608	1.5569
		MRC_N9	15.3458	12.25	1.406	1.6898
		MRC_P9	15.3453	12.25	1.477	1.6183
	std	DLP	0.207	-	-	0.207
		RC	0.1871	-	-	0.1871
		MRC_N9	0.2032	-	-	0.2032
		MRC_P9	0.1945	-	-	0.1945
	min	DLP	14.469	12.25	1.3646	0.8544
		RC	14.5831	12.25	1.5608	0.7723
		MRC_N9	14.4944	12.25	1.406	0.8384
		MRC_P9	14.5298	12.25	1.477	0.8028
	max	DLP	16.1778	12.25	1.3646	2.5633
		RC	16.1278	12.25	1.5608	2.3169
		MRC_N9	16.1711	12.25	1.406	2.5151
		MRC_P9	16.1353	12.25	1.477	2.4083

- **평균적으로 DLP가 가장 좋은 성능을 보임**
  - 불확실한 탄소가격이 높게 실현됨에 따른 penalty보다 RC에서 잃어버리는 optimality가 더 큰 손해로 작용하는 것을 추론 가능
- RC가 가장 작은 분산을 보이며, DLP가 가장 큰 분산을 가짐
- MRC는 DLP보다 더 적은 분산을 가짐
- 시뮬레이션 실험의 best case 관점에서 DLP, MRC, RC 순으로 작은 값을 가짐
  - RC는 Optimality를 가장 크게 잃어버림
- 시뮬레이션 실험의 worst case 관점에서 RC, MRC, DLP 순으로 작은 값을 가짐
  - RC가 최악의 상황에서 가장 적은 손해를 보임
  - MRC는 DLP보다는 적은 손해를 보임

Numerical Experiment – Experiment 1 results (3/4)

Data 2-1 (자기회귀계수가 -0.9인 탄소세)에 대한 시뮬레이션 실험의 평균 관점에서 MRC가 가장 좋은 성능을 보임

- **Simulation data:** ***Data 2-1*** $(\alpha_t + \zeta_t \delta_t | \zeta_t = -0.9\zeta_{t-1} + \varepsilon_{it})$

Table 11. Comparison of the simulation results in Data 2-1.

Data		Model	Total cost	Facility cost	Transportation cost	Carbon tax cost
Data 2-1	mean	DLP	15.3008	12.25	1.3646	1.6863
		RC	15.3348	12.25	1.5608	1.5239
		MRC_N9	15.294	12.25	1.406	1.638
	std	DLP	0.0235	-	-	0.0235
		RC	0.0209	-	-	0.0209
		MRC_N9	0.0218	-	-	0.0218
	min	DLP	15.2246	12.25	1.3646	1.6101
		RC	15.2666	12.25	1.5608	1.4557
		MRC_N9	15.2239	12.25	1.406	1.5679
	max	DLP	15.359	12.25	1.3646	1.7445
		RC	15.3868	12.25	1.5608	1.576
		MRC_N9	15.3463	12.25	1.406	1.6903

- **평균적으로 MRC가 가장 좋은 성능을 보임**
- RC가 가장 작은 분산을 보이며,
  DLP가 가장 큰 분산을 가짐
- MRC는 DLP보다 더 적은 분산을 가짐
- **시뮬레이션 실험의 best case 관점에서 MRC가 가장 작은 total cost를 가짐**
  - DLP보다 덜 보수적인 해 도출하는 구간 존재 (시계열 특성 반영에 따름)
- **시뮬레이션 실험의 worst case 관점에서 MRC가 가장 작은 total cost를 가짐**
  - MRC는 DLP보다 보수적으로 대응하면서도 RC보다 optimality를 덜 잃음

Numerical Experiment – Experiment 1 results (4/4)

Data 3-1 (자기회귀계수가 0.9인 탄소세)에 대한 시뮬레이션 실험의 평균 관점에서 MRC가 가장 좋은 성능을 보임

- **Simulation data:** ***Data 3-1*** $(\alpha_t + \zeta_t \delta_t | \zeta_t = 0.9\zeta_{t-1} + \varepsilon_{it})$

Table 12. Comparison of the simulation results in Data 3-1.

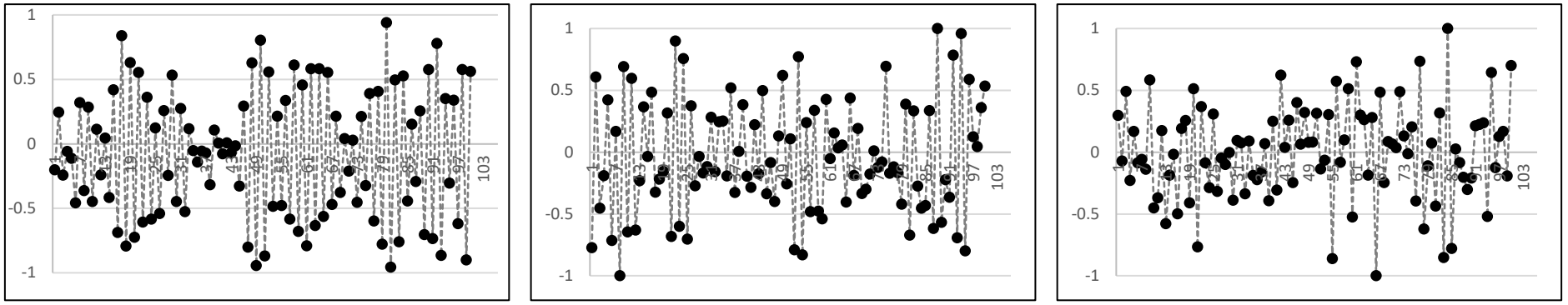
Data		Model	Total cost	Facility cost	Transportation cost	Carbon tax cost
Data 3-1	mean	DLP	15.5766	12.25	1.3646	1.962
		RC	15.5842	12.25	1.5608	1.7734
		MRC_P9	15.5704	12.25	1.477	1.8434
	std	DLP	0.1136	-	-	0.1136
		RC	0.1029	-	-	0.1029
		MRC_P9	0.1067	-	-	0.1067
	min	DLP	15.2413	12.25	1.3646	1.6268
		RC	15.2808	12.25	1.5608	1.4699
		MRC_P9	15.2554	12.25	1.477	1.5284
	max	DLP	15.9178	12.25	1.3646	2.3033
		RC	15.8931	12.25	1.5608	2.0822
		MRC_P9	15.891	12.25	1.477	2.164

- **평균적으로 MRC가 가장 좋은 성능을 보임**
- RC가 가장 작은 분산을 보이며, DLP가 가장 큰 분산을 가짐
- MRC는 DLP보다 더 적은 분산을 가짐
- 시뮬레이션 실험의 best case 관점에서 DLP, MRC, RC 순으로 작은 값을 가짐
  - RC는 Optimality를 가장 크게 잃어버림
- **시뮬레이션 실험의 worst case 관점에서 MRC가 가장 작은 total cost를 가짐**
  - MRC는 DLP보다 보수적으로 대응하면서도 RC보다 optimality를 덜 잃음

Numerical Experiment – Experiment 2 (1/2)

탄소세의 자기회귀계수 ϕ가 음수일 때 -0.9, -0.7, -0.5로 갈 수록 탄세소의 시점별 예측값이 0으로 빠르게 수렴

- 그림 10은 MRC_N9, MRC_N7, MRC_N5에 대응하는 적용할 탄소세의 historical data이며, historical data에 대한 6시점까지의 미래 예측값에 예측구간은 표 13과 14와 같음 → **표 14의 예측구간은 Markov uncertainty set이 됨**



a. $\phi = -0.9$ **b.** $\phi = -0.7$ **c.** $\phi = -0.5$

Figure 10. Historical data of uncertain carbon tax rate when $\phi = -0.9, -0.7, -0.5$

Table 13. Estimation of $\hat{\zeta}_{s-1}(t)$.

	$\hat{\zeta}_{s-1}(t)$		
t	$\phi = -0.9$	$\phi = -0.7$	$\phi = -0.5$
1	-0.5106	-0.4306	-0.3908
2	0.4636	0.3169	0.2178
3	-0.421	-0.2333	-0.1214
4	0.3823	0.1717	0.0676
5	-0.3471	-0.1264	-0.0377
6	0.3152	0.093	0.021

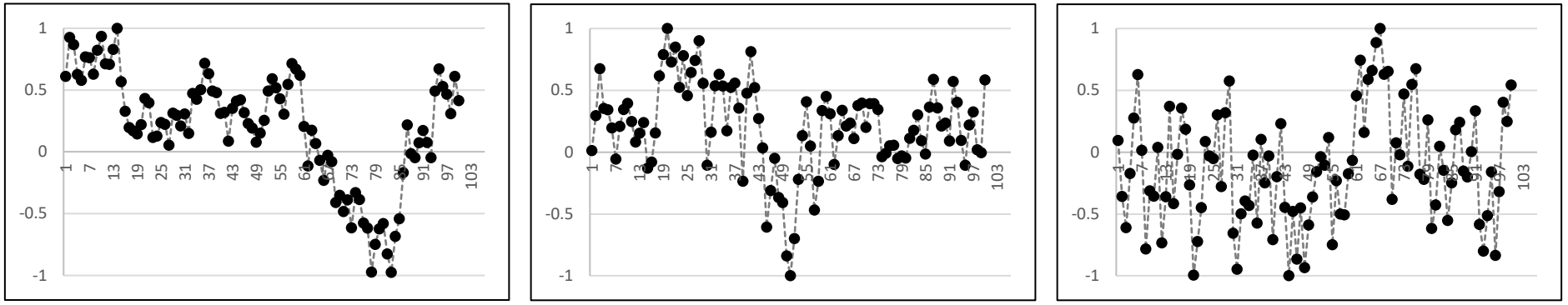
Table 14. 95% prediction interval of the $\hat{\zeta}_{s-1}(t)$ when $\phi = -0.9, -0.7, -0.5$

	$\phi = -0.9$		$\phi = -0.7$		$\phi = -0.5$	
t	95% lb	95% ub	95% lb	95% ub	95% lb	95% ub
1	-0.5963	-0.4248	-0.5663	-0.2948	-0.5761	-0.2056
2	0.3478	0.5795	0.1483	0.4855	0.0057	0.4299
3	-0.5567	-0.2852	-0.4172	-0.0493	-0.3411	0.0984
4	0.2321	0.5324	-0.02	0.3634	-0.1544	0.2897
5	-0.5082	-0.186	-0.3222	0.0695	-0.2605	0.1851
6	0.1456	0.4847	-0.105	0.2911	-0.202	0.244

Numerical Experiment – Experiment 2 (2/2)

탄소세의 자기회귀계수 ϕ가 양수일 때도 0.9, 0.7, 0.5로 갈 수록 탄세소의 시점별 예측값이 0으로 빠르게 수렴

- 그림 11은 MRC_P9, MRC_P7, MRC_P5에 대응하는 적용할 탄소세의 historical data이며, historical data에 대한 6시점까지의 미래 예측값에 예측구간은 표 15과 16와 같음 → **표 16의 예측구간은 Markov uncertainty set이 됨**



a. $\phi = 0.9$ **b.** $\phi = 0.7$ **c.** $\phi = 0.5$

Figure 11. Historical data of uncertain carbon tax rate when $\phi = 0.9, 0.7, 0.5$

Table 15. Estimation of $\hat{\zeta}_{s-1}(t)$.

	$\hat{\zeta}_{s-1}(t)$		
t	$\phi = 0.9$	$\phi = 0.7$	$\phi = 0.5$
1	0.3777	0.3702	0.26
2	0.3427	0.2566	0.1247
3	0.3109	0.1779	0.0598
4	0.282	0.1233	0.0287
5	0.2558	0.0855	0.0137
6	0.2321	0.0593	0.0066

Table 16. 95% prediction interval of the $\hat{\zeta}_{s-1}(t)$ when $\phi = 0.9, 0.7, 0.5$

	$\phi = 0.9$		$\phi = 0.7$		$\phi = 0.5$	
t	95% lb	95% ub	95% lb	95% ub	95% lb	95% ub
1	0.3066	0.4488	0.1958	0.5446	0.0393	0.4807
2	0.2467	0.4387	0.0445	0.4688	-0.1201	0.3694
3	0.1984	0.4233	-0.0502	0.406	-0.1902	0.3097
4	0.1577	0.4064	-0.1121	0.3587	-0.2225	0.2798
5	0.1225	0.3892	-0.1533	0.3243	-0.2377	0.2651
6	0.0918	0.3724	-0.1812	0.2997	-0.2449	0.2581

Numerical Experiment – Experiment 2 results (1/2)

Data 1 (탄소세가 시간에 독립적으로 실현)에 대한 시뮬레이션 실험의 평균 관점에서 DLP가 가장 좋은 성능을 보임

- **Simulation data: *Data 1*** ($\alpha_t \sim Uniform(5,15)$)

Table 17. Comparison of the simulation results in Experiment 2 in Data 1.

Data		Model	Total cost	Carbon tax cost
Data 1	mean	DLP	15.337	1.7225
		RC	15.3678	1.5569
		MRC_N9	15.3458	1.6898
		MRC_N7	15.3410	1.6823
		MRC_N5	15.3410	1.6618
		MRC_P9	15.3453	1.6183
		MRC_P7	15.3447	1.6237
		MRC_P5	15.3426	1.6346
	std	DLP	0.207	0.207
		RC	0.1871	0.1871
		MRC_N9	0.2032	0.2032
		MRC_N7	0.2022	0.2022
		MRC_N5	0.1998	0.1998
		MRC_P9	0.1945	0.1945
		MRC_P7	0.1951	0.1951
		MRC_P5	0.1964	0.1964

	Model	Total cost	Carbon tax cost
min	DLP	14.469	0.8544
	RC	14.5831	0.7723
	MRC_N9	14.4944	0.8384
	MRC_N7	14.4934	0.8346
	MRC_N5	14.5037	0.8245
	MRC_P9	14.5298	0.8028
	MRC_P7	14.5264	0.8054
	MRC_P5	14.5188	0.8109
max	DLP	16.1778	2.5633
	RC	16.1278	2.3169
	MRC_N9	16.1711	2.5151
	MRC_N7	16.1627	2.50393
	MRC_N5	16.1526	2.4734
	MRC_P9	16.1353	2.4083
	MRC_P7	16.1373	2.4162
	MRC_P5	16.1406	2.4327

Numerical Experiment – Experiment 2 results (2/2)

탄소세의 자기회귀계수 ϕ의 절대값이 작아질 수록 시뮬레이션 평균값이 MRC가 DLP보다 커지는 경향 존재

- 표 18와 19은 탄소세의 자기회귀계수 ϕ가 음수일 때와 양수일 때 시뮬레이션 결과를 요약하고 있음
- 자기회귀계수 ϕ의 절대값이 0.9와 0.7일 때 시뮬레이션 평균관점에서 MRC가 DLP보다 유리한 반면, 0.5이면 DLP가 MRC보다 유리한 케이스를 보여줌

Table 18. The simulation results in Experiment 2 in Data 2-1 ~ 2-3.

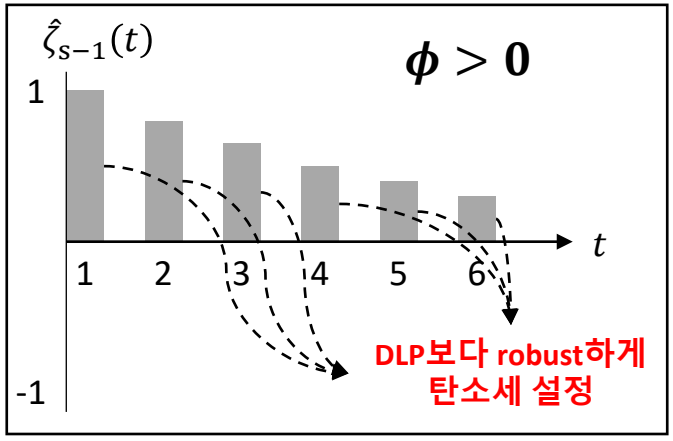
		Total cost		
		$\phi = -0.9$	$\phi = -0.7$	$\phi = -0.5$
	Model	Data 2-1	Data 2-2	Data 2-3
mean	DLP	15.3008	15.2901	15.2887
	RC	15.3348	15.3257	15.3246
	MRC	15.294	15.2895	15.2913
std	DLP	0.0235	0.0233	0.0251
	RC	0.0209	0.0209	0.0226
	MRC	0.0218	0.0226	0.0244
min	DLP	15.2246	15.2202	15.2128
	RC	15.2666	15.2626	15.2555
	MRC	15.2239	15.2189	15.2176
max	DLP	15.359	15.3668	15.3760
	RC	15.3868	15.3948	15.4040
	MRC	15.3463	15.3641	15.3750

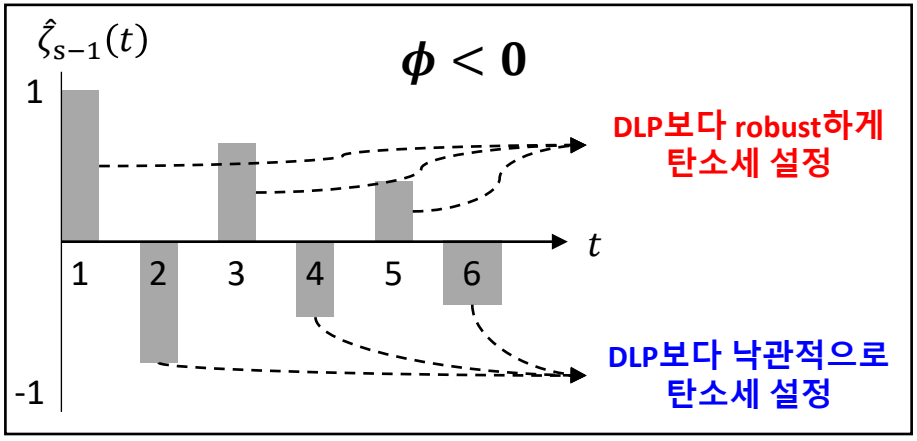
Table 19. The simulation results in Experiment 2 in Data 3-1 ~ 3-3.

		Total cost		
		$\phi = 0.9$	$\phi = 0.7$	$\phi = 0.5$
	Model	Data 3-1	Data 3-2	Data 3-3
mean	DLP	15.5766	15.4873	15.4005
	RC	15.5842	15.5034	15.4248
	MRC	15.5704	15.4856	15.4026
std	DLP	0.1136	0.0808	0.0603
	RC	0.1029	0.0732	0.0545
	MRC	0.1067	0.0764	0.0572
min	DLP	15.2413	15.2432	15.2306
	RC	15.2808	15.2819	15.2712
	MRC	15.2554	15.2551	15.2413
max	DLP	15.9178	15.7384	15.6041
	RC	15.8931	15.7308	15.6086
	MRC	15.8910	15.7227	15.5959

Summary of experiment results

- **불확실한 탄소세가 AR(1) 과정을 따를 때**
  - MRC는 DLP보다 불확실성에 강건하게 대응하는 경향
  - MRC는 RC보다 optimality를 덜 잃는 경향
- **자기회귀계수 ϕ의 강도에 따라 MRC와 DLP의 성능이 달라질 수 있음**
  - ϕ의 절대값이 클 수록 미래 값의 경향이 과거 값에 강하게 연관되어 시계열 패턴을 반영한 MRC가 RC와 DLP보다 더 유리하게 작용 가능
  - ϕ의 절대값이 작을 수록 미래 값의 경향이 과거 값에 약하게 연관되어 $\zeta_t = \phi\zeta_{t-1} + \varepsilon_{it}$에서 ε_{it}의 영향도가 커져서 DLP가 MRC보다 유리하게 작용할 수도 있음
- **자기회귀계수 ϕ의 부호에 따라 Multi-period 의사결정에서 MRC는 DLP보다** 시뮬레이션 실험의 best case 관점에서 성능이 달라질 수 있음
  - $\phi > 0$이면, $\hat{\zeta}_{s-1}(t)$는 같은 부호를 가지며 감소 → ζ_{s-1}가 -1에 가까우면 MRC가 좋을 가능성 높음
  - $\phi < 0$이면, $\hat{\zeta}_{s-1}(t)$는 t마다 다른 부호를 가지며 감소 → $|\zeta_{s-1}|$가 1에 가까우면 MRC가 좋을 가능성 높음





Conclusions

- **Contribution**
  - 불확실한 매개변수가 AR(1) 과정을 따를 때, historical data를 통해 RO보다 덜 보수적인 해를 도출할 수 있는 Markov uncertainty set 제안
  - Markov uncertainty set을 적용한 tractable RC 제안
  - Numerical 실험을 통해 RC대비 MRC의 robustness와 optimality 성능 확인

- **Limitation and Future study**
  - Historical data의 sample size에 대한 issue 존재
  - Markov uncertainty set이 Box uncertainty set의 범위를 벗어날 수 있는 위험 존재
    - 그림 12의 violation case1과 case2

- **Future study**
  - Historical data의 sample size에 대한 실험 진행
  - Box uncertainty set의 범위를 벗어날 수 있는 경우를 고려한 Markov RC 도출

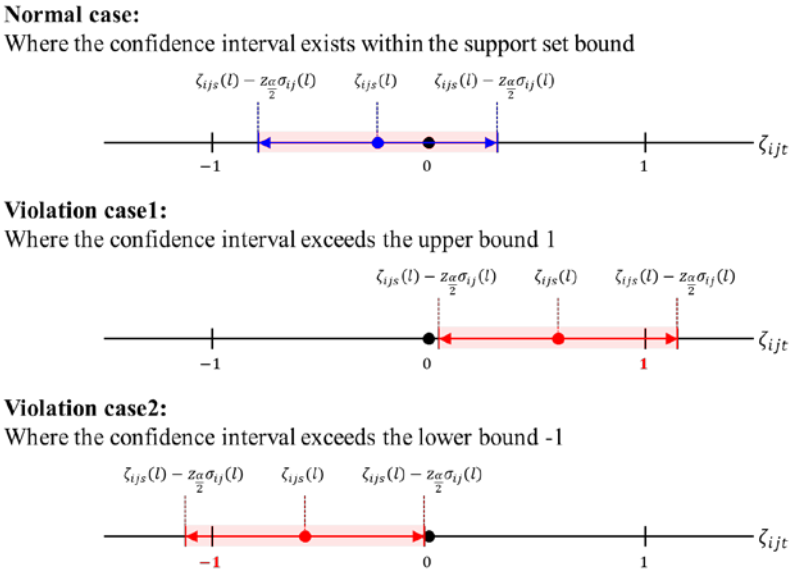


Figure 12. Cases of confidence intervals that may arise

감사합니다.

Q & A

[Appendix] Probability Bounds of Constraint Violation

- Considering the Markov certification set, the probabilities bounds of constraint violation calculation is as follows.

$$\Pr\left(\sum_j \tilde{a}_{ij} x_j^* > b_i\right)$$

$$= \Pr\left(\sum_j a_{ij} x_j^* + \sum_{j\in J_i} \zeta_{ij} \hat{a}_{ij} x_j^* > b_i\right)$$

$$\le \Pr\left(\sum_{j\in J_i} \zeta_{ij} \hat{a}_{ij} \left|x_j^*\right| > \sum_{j\in A_i} \hat{\xi}_{ij,s-1}(1)\, \hat{a}_{ij} \left|x_j^*\right| + \sum_{j\in W_i} \zeta_{ij} \hat{a}_{ij} \left|x_j^*\right| + \sum_{j\in A_i} \eta_{ij} z_{\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{ij}(1)\, \hat{a}_{ij} \left|x_j^*\right|\right)$$

$$= \Pr\left(\sum_{j\in A_i} \left(\zeta_{ij} - \hat{\xi}_{ij,s-1}(1)\right) \hat{a}_{ij} \left|x_j^*\right| > \sum_{j\in A_i} \eta_{ij} z_{\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{ij}(1)\, \hat{a}_{ij} \left|x_j^*\right|\right)$$

$$= \Pr\left(\sum_{j\in A_i} \left(\zeta_{ij} - \hat{\xi}_{ij,ts1}(1)\right) > \sum_{j\in A_i} \eta_{ij} z_{\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{ij}(1)\right)$$

$$\le \Pr\left(\left|\sum_{j\in A_i} \left(\zeta_{ij} - \hat{\xi}_{ij,s-1}(1)\right)\right| > z_{\frac{\alpha}{2}} \sum_{j\in A_i} \hat{\sigma}_{ij}(1)\right)$$

$$= \Pr\left(\left|\sum_{j\in A_i} \zeta_{ij} - \sum_{j\in A_i} \hat{\xi}_{ij,s-1}(1)\right| > z_{\frac{\alpha}{2}} \sum_{j\in A_i} \hat{\sigma}_{ij}(1)\right)$$

$$\le \Pr\left(\left|\sum_{j\in A_i} \zeta_{ij} - \sum_{j\in A_i} \hat{\xi}_{ij,s-1}(1)\right| > z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sum_{j\in A_i} \left(\hat{\sigma}_{ij}(1)\right)^2}\right) = \alpha\%$$

$$\therefore \Pr\left(\sum_j \tilde{a}_{ij} x_j^* > b_i\right) \le \alpha\%$$